ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.6

В. В. Благовидов, А. И. Лобанов

МНОГОЗНАЧНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Предложен многозначный метод для решения дифференциальных уравнений с дробными производными. Проведено исследование аппроксимации и устойчивости метода.

A multivalue method for decision of differential equations including fractional derivatives is offered. A research of approximation and stability of the method is carried out.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, производная дробного порядка, многозначный метод, устойчивость, сходимость разностной схемы.

Key words: differential equations, fractal derivity, multivalue method, stability and convergence of the difference scheme.

Введение

Краевые задачи для дифференциальных уравнений с дробными производными возникают при описании процессов переноса в средах с фрактальной размерностью (см. [1—3]). В таких уравнениях порядок дробной производной связан с фрактальной размерностью среды (см. [2]). Способы вычисления фрактальной размерности описаны в работе [4].

Метод для решения дифференциальных уравнений $\partial_{0t}^{\alpha} u = f(u,t)$, $\alpha \in (0,1)$ ($\partial_{0t}^{\alpha} \circ$ — регуляризованная дробная производная порядка α) предложен в [5] и применен для решения первой начально-краевой задачи для уравнения диффузии дробного порядка в многомерных областях. Порядок аппроксимации $O(h^{\alpha})$. Разностные аппроксимации оператора дробного дифференцирования выводятся в работе [6].

Предложен и исследован многозначный метод для решения дифференциальных уравнений с дробными производными. Он заключается в возможности решения задачи с переменным шагом. Недостаток — наличие разгонного участка с низким порядком аппроксимации.

1. Постановка задачи

Цель работы — создание многозначного метода для численного решения задачи Коши для уравнения дробного порядка вида

$$D_{0x}^{\alpha} u(t) = f(u,x)\,, \tag{1}$$

$$u(0) = v\,, \tag{2}$$

где $D_{0x}^{\alpha} u(t) = \dfrac{1}{\Gamma(-\alpha)} \displaystyle\int_0^x \dfrac{u(t)dt}{(x-t)^{\alpha+1}}$, $\Gamma(x)$ — гамма-функция.

2. Построение многозначного метода

Для решения задачи Коши (1—2) составим трехкомпонентный вектор Нордсика [8, с. 379], используя в качестве компонентов вектора члены разложения функции u в ряд Тейлора: $\mathbf{U}_n = \left(u_n, h\dot{u}_n, \dfrac{h^2}{2}\ddot{u}_n \right)^{\mathrm{T}}$, где h — шаг по независимой переменной t.

Чтобы связать значения вектора Нордсика на n-м слое с его значениями на предыдущем слое, запишем формулу Тейлора:

$$u_n = u_{n-1} + y\dot{u}_{n-1} + \frac{y^2}{2}\ddot{u}_{n-1} + \frac{y^3}{6}e_n\ , \quad y \in [0, h]\,. \qquad (3)$$

Первый компонент вектора Нордсика выразим через компоненты вектора на предыдущем слое. Для выражения оставшихся компонент вычислим производные интерполяционного полинома при $y = h$:

$$h\dot{u}_n = h\dot{u}_{n-1} + y^2\ddot{u}_{n-1} + \frac{y^3}{2}e_n\ , \qquad (4)$$

$$\frac{y^2}{2}\ddot{u}_n = \frac{y^2}{2}\ddot{u}_{n-1} + \frac{y^3}{2}e_n\ . \qquad (5)$$

Систему (3—5) можно записать в матричном виде:

$$\mathbf{U}_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{U}_{n-1} + \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\frac{h^3}{2}e_n\ .$$

Формальный порядок разностной задачи превышает порядок дифференциальной задачи. В предложенном методе на переходе от $(n-1)$-го слоя к n-му из уравнений исключается $\dot{u}_0$, $\ddot{u}_0$ полагается равным нулю. При переходе от нулевого слоя к первому положим $\dot{u}_0 = 0$.

Для решения задачи (1—2) необходимо построить разностный оператор, аппроксимирующий $D^{\alpha}_{bx}u(t)$. Для этого разобьем отрезок $[0, x]$ на N отрезков длины $h = x/N$ (в случае переменного шага h надо лишь ввести следующие изменения: $x_0 = 0,\ h_n = x_n - x_{n-1}$), тогда $x_n = hn,\quad n = \overline{0, N}$. Воспользуемся формулой [1, с. 46]

$$D^{\alpha}_{bx}u(t) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{u(b)^{(k)}(x-b)^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_b^x u^{(n)}(t)(x-t)^{n-1-\alpha}\,dt\,.$$

В рассматриваемом случае ($b = 0$) выразим оператор дробной производной $D^{\alpha}_{0x_n}u(t)$ двумя способами, приняв n равным нулю в первом случае и единице — во втором:

$$D^{\alpha}_{0x_n}u(t) = \frac{u_0 {x_n}^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{x_n}\dot{u}(t)(x-t)^{-\alpha}\,dt\ , \qquad (6)$$

$$D^{\alpha}_{0x_n}u(t) = \frac{u_0 {x_n}^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{\dot{u}_0 {x_n}^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\int_0^{x_n}\ddot{u}(t)(x-t)^{1-\alpha}\,dt\,. \qquad (6')$$

Приближенно вычислим интеграл в выражении (6). Выразим интеграл в правой части через сумму интегралов по элементарным отрезкам:

$$\int_0^{x_n}\dot{u}(t)(x-t)^{-\alpha}\,dt = \sum_{k=1}^{n}\int_{kh-h}^{kh}\dot{u}(t)(x_n-t)^{-\alpha}\,dt\,.$$

Заменим $\dot{u}(t)$ на значения компонентов вектора Нордсика в узлах

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)h}^{kh}\dot{u}(t)(x_n-t)^{-\alpha}\,dt \approx \sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)h}^{kh}\frac{\dot{u}_{k-1}+\dot{u}_k}{2}(x_n-t)^{-\alpha}\,dt =$$

$$= \frac{h^{1-\alpha}}{2(1-\alpha)}\left\{\left\{\dot{u}_0 n^{1-\alpha}\left(1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^{1-\alpha}\right) + \dot{u}_n + \sum_{k=1}^{n-1}\dot{u}_k\left((n-k+1)^{1-\alpha}-(n-k-1)^{1-\alpha}\right)\right\}\right\}.$$

Тогда разностный аналог (6) имеет вид

$$D_{0x_n}^{\alpha} u(t) \approx \frac{u_0 x_n^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{h^{1-\alpha}}{2\Gamma(2-\alpha)} \times$$
$$\times \left\{ \dot{u}_0 \left(n^{1-\alpha} - (n-1)^{1-\alpha} \right) + \dot{u}_n + \sum_{k=1}^{n-1} \dot{u}_k \left((n-k+1)^{1-\alpha} - (n-k-1)^{1-\alpha} \right) \right\}. \quad (7)$$

Аналогично уравнения для (6′) получим

$$D_{0x_n}^{\alpha} u(t) \approx \frac{u_0 x_n^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{\dot{u}_0 x_n^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} + \frac{h^{2-\alpha}}{2\Gamma(3-\alpha)} \times \left\{ \ddot{u}_n + \sum_{k=1}^{n-1} \ddot{u}_k \left((n-k+1)^{2-\alpha} - (n-k-1)^{2-\alpha} \right) \right\}. \quad (7')$$

В выражении (7′) отсутствует $h^{2-\alpha} \ddot{u}_0 \left(n^{2-\alpha} - (n-1)^{2-\alpha} \right) \left(2\Gamma(3-\alpha) \right)^{-1}$, поскольку $\ddot{u}_0 \equiv 0$.

Утверждение. *Равенства (7) и (7′) аппроксимируют оператор дробного дифференцирования с порядком $O(h^2)$ и $O(h)$ соответственно.*

Доказательство. Оценим модуль разности между приближенным и точным значениями интеграла, входящего в выражение для оператора дробного дифференцирования

$$J = \sum_{k=1}^{n} \int_{kh-h}^{kh} \left(\frac{\dot{u}_k + \dot{u}_{k-1}}{2} - \dot{u}(t) \right) (x_n - t)^{-\alpha} \, dt .$$

Оценим погрешность на элементарном отрезке. Для этого рассмотрим разложения $\dot{u}_k$ и $\dot{u}(t)$ в ряд Тейлора в окрестности $\dot{u}_{k-1}$:

$$\dot{u}_k = \dot{u}(x_{k-1} + h) = \dot{u}_{k-1} + \ddot{u}_{k-1}(x_k - x_{k-1}) + \dddot{u}_{k-1} \frac{(x_k - x_{k-1})^2}{2} + O(h^3) ,$$
$$\dot{u}(t) = \dot{u}_{k-1} + \ddot{u}_{k-1}(t - x_{k-1}) + \dddot{u}_{k-1} \frac{(t - x_{k-1})^2}{2} + O(h^3) ,$$

так как $t - x_{k-1} \leqslant h$. Тогда получим

$$J_k = \ddot{u}_{k-1} \int_{kh-h}^{kh} \left(\frac{x_k - x_{k-1}}{2} - \frac{2\left(t - x_{k-1}\right)}{2} \right) \left(x_n - t\right)^{-\alpha} dt +$$
$$+ \dddot{u}_{k-1} \int_{kh-h}^{kh} \left(\frac{\left(x_k - x_{k-1}\right)^2}{4} - \frac{\left(t - x_{k-1}\right)^2}{2} \right) \left(x_n - t\right)^{-\alpha} dt + O(h^{5-\alpha}) = J_k^1 + J_k^2 + O(h^{5-\alpha}) .$$

Введем новую переменную интегрирования $\xi = t - x_{k-1}$ и оценим J_k^1:

$$J_k^1 = \ddot{u}_{k-1} \frac{1}{2} \int_{kh-h}^{kh} \left((h - \xi) - \xi \right) \left(x_n - x_{k-1} - \xi \right)^{-\alpha} d\xi = -\ddot{u}_{k-1} \frac{\alpha h^3}{4\left(x_n - x_{k-1}\right)^{1+\alpha}} + O(\xi^3) = O(\xi^3) .$$

Для модуля J_k^2 имеем оценку

$$\left| J_k^2 \right| \leqslant \frac{\left| \dddot{u}_{k-1} \right|}{4} h^{3-\alpha} \left[\left(n - k + 1\right)^{1-\alpha} - \left(n - k\right)^{1-\alpha} \right].$$

Наконец, оценим модуль J:

$$|J| \leqslant O(h^2) + \frac{\max\limits_{t \in [0, x_n]} \left| \dddot{u}(t) \right|}{4} h^{3-\alpha} \sum_{k=1}^{n} \left[\left(n - k + 1\right)^{1-\alpha} - \left(n - k\right)^{1-\alpha} \right] =$$
$$= O(h^2) + \frac{x_n^{1-\alpha}}{4} \max_{t \in [0, x_n]} \left| \dddot{u}(t) \right| h^2 = O(h^2) .$$

Такая же оценка аппроксимации справедлива и приближенного вычисления интеграла, входящего в формулу (6'). Но, учитывая опущенное слагаемое $h^{2-\alpha} \ddot{u}_0 \left(n^{2-\alpha} - (n-1)^{2-\alpha} \right) \left(2\Gamma(3-\alpha) \right)^{-1}$ (из-за того что $\ddot{u}_0 \equiv 0$),

$$\frac{h^{2-\alpha}\ddot{u}_0(n^{2-\alpha}-(n-1)^{2-\alpha})}{2\Gamma(3-\alpha)} \square\, h^{2-\alpha}(n^{2-\alpha}-(n-1)^{2-\alpha}) =$$

$$= x_n^{2-\alpha}-\left(x_n-h\right)^{2-\alpha} = x_n^{2-\alpha}\left[1-\left(1-\frac{1}{x_n}\right)^{2-\alpha}\right] \square\, x_n^{1-\alpha}(2-\alpha)h = O(h)\,.$$

Таким образом, равенства (7′) аппроксимирует оператор дробного дифференцирования с порядком $O(h)$. Утверждение доказано. □

Введем обозначения:

$$S_n^1=\sum_{k=1}^{n-2}\dot{u}_k\left((n-k+1)^{1-\alpha}-(n-k-1)^{1-\alpha}\right),\ S_n^2=\sum_{k=1}^{n-2}\ddot{u}_k\left((n-k+1)^{2-\alpha}-(n-k-1)^{2-\alpha}\right).$$

С учетом систем (4, 5) равенства (7, 7') примут вид

$$D_{0x_n}^{\alpha}u(t)\approx\frac{u_0x_n^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}+\frac{h^{1-\alpha}}{2\Gamma(2-\alpha)}\times$$

$$\times D_{0x_n}^{\alpha}u(t)\approx\frac{u_0x_n^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}+\frac{h^{1-\alpha}}{2\Gamma(2-\alpha)}\times\left\{\dot{u}_0\left(n^{1-\alpha}-(n-1)^{1-\alpha}\right)+\left(1+2^{1-\alpha}\right)\dot{u}_{n-1}+h\ddot{u}_{n-1}+\frac{h^2}{2}e_n+S_n^1\right\}; \qquad (8)$$

$$D_{0x_n}^{\alpha}u(t)\approx\frac{u_0x_n^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}+\frac{\dot{u}_0x_n^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}+\frac{h^{1-\alpha}}{2\Gamma(2-\alpha)}\left\{(1+2^{1-\alpha})\ddot{u}_{n-1}+he_n+S_n^2\right\}. \qquad (8')$$

Рассмотрим проекцию функции правой части (1) на разностную сетку $f_m^n=f(u_m,x_n)$. Так как она зависит от неизвестного значения u_n, то для решения уравнения линеаризуем в окрестности u_{n-1}

$$f_n^n=f_{n-1}^n+(f_u')_{n-1}^n(u_n-u_{n-1})+O\left((u_n-u_{n-1})^2\right)=f_{n-1}^n+(f_u')_{n-1}^n(u_n-u_{n-1})+O(h^2)\,. \qquad (9)$$

Получаем явное выражение для вычисления e_n и уточнения $\dot{u}_0$:

$$\mathbf{A}_n\begin{pmatrix}\dot{u}_0\\ e_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{h^{1-\alpha}\left(n^{1-\alpha}-(n-1)^{1-\alpha}\right)}{2\Gamma(2-\alpha)} & \dfrac{h^{3-\alpha}}{4\Gamma(2-\alpha)}\\ \dfrac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} & \dfrac{h^{3-\alpha}}{2\Gamma(3-\alpha)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{u}_0\\ e_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varphi_n\\ \psi_n\end{pmatrix}, \qquad (10)$$

где с учетом выражения (9)

$$\varphi_n\approx f_{n-1}^n+(f_u')_{n-1}^n(u_n-u_{n-1})-\frac{u_0x_n^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}-\frac{(1+2^{1-\alpha})\dot{u}_{n-1}+h\ddot{u}_{n-1}+S_n^1}{2\Gamma(2-\alpha)}h^{1-\alpha},$$

$$\psi_n\approx f_{n-1}^n+\left(f_u'\right)_{n-1}^n\left(u_n-u_{n-1}\right)-\frac{u_0x_n^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}-\frac{(1+2^{2-\alpha})\ddot{u}_{n-1}+S_n^2}{2\Gamma(3-\alpha)}h^{2-\alpha}$$

с точностью до погрешности аппроксимации интегральных сумм.

Для того чтобы система (10) имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы детерминант матрицы $\mathbf{A}_n$ был отличен от 0:

$$\det\mathbf{A}_n=-\frac{h^{4-2\alpha}}{4\Gamma(2-\alpha)\Gamma(3-\alpha)}\left\{(1-\alpha)n^{1-\alpha}+(n-1)^{1-\alpha}\right\}\neq 0.$$

Это заведомо верно при $\alpha<1$.

Найдем e_n, воспользовавшись правилом Крамера:

$$e_n=\frac{1}{\det\mathbf{A}_n}\det\begin{pmatrix}\left(n^{1-\alpha}-(n-1)^{1-\alpha}\right) & \varphi_n\\ 2n^{1-\alpha} & \psi_n\end{pmatrix}\cdot\frac{h^{1-\alpha}}{2\Gamma(2-\alpha)}=$$

$$=\frac{2}{h^3}\left(a_nu_n-a_nu_{n-1}-hb_n\dot{u}_{n-1}+2h^2c_n\ddot{u}_{n-1}+Q_n\right).$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$a_n = \frac{\Gamma(3-\alpha)\left[n^{1-\alpha}+(n-1)^{1-\alpha}\right]}{2\left[(1-\alpha)n^{1-\alpha}+(n-1)^{1-\alpha}\right]} h^{\alpha}(f'_u)^n_{n-1}\ ,\quad b_n = \frac{2\left(1+2^{1-\alpha}\right)(2-\alpha)n^{1-\alpha}}{(1-\alpha)n^{1-\alpha}+(n-1)^{1-\alpha}}\ ,$$

$$c_n = \frac{2\left[(n^{1-\alpha}-(n-1)^{1-\alpha})(1+2^{1-\alpha})-2(2-\alpha)n^{1-\alpha}\right]}{(1-\alpha)n^{1-\alpha}+(n-1)^{1-\alpha}}\ ,$$

$$Q_n = \frac{h^{\alpha}\Gamma(3-\alpha)}{(1-\alpha)n^{1-\alpha}+(n-1)^{1-\alpha}} \times \left[(n^{1-\alpha}+(n-1)^{1-\alpha})f^n_{n-1} - \frac{(n^{1-\alpha}+(n-1)^{1-\alpha})h^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}u_0 + \right.$$

$$\left. + \frac{n^{1-\alpha}-(n-1)^{1-\alpha}}{2\Gamma(3-\alpha)}S_n^2 - 2\left(2-\alpha\right)n^{1-\alpha}h^{1-\alpha}S_n^1\right].$$

Вместо выражения (9) также можно использовать итерационный метод Ньютона.

Используем e_n для вычисления значения вектора Нордсика на n-м слое. Вместо вектора $(1/3,1,1)^T$ будем использовать $\mathbf{L}=(l_1,l_2,l_3)^T$. Значения параметров l_1,l_2,l_3 находим из требований устойчивости метода. Так как вектор Нордсика на следующем шаге представим в виде

$$\mathbf{U}_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{U}_{n-1} + \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix}\left(a_n u_n - a_n u_{n-1} - h b_n \dot{u}_{n-1} + \frac{h^2}{2}c_n \ddot{u}_{n-1} + Q_n\right),$$

то для линеаризованного уравнения легко имеем явное выражение

$$\mathbf{U}_n = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{1-l_1 b_n}{1-l_1 a_n} & \dfrac{1-l_1 c_n}{1-l_1 a_n} \\ 0 & 1-l_2 b_n + \dfrac{1-l_1 b_n}{1-l_1 a_n} l_2 a_n & 2+l_2 c_n + \dfrac{1-l_1 c_n}{1-l_1 a_n} l_2 a_n \\ 0 & -l_3 b_n + \dfrac{1-l_1 b_n}{1-l_1 a_n} l_3 a_n & 1+l_3 c_n + \dfrac{1-l_1 c_n}{1-l_1 a_n} l_3 a_n \end{pmatrix}\mathbf{U}_{n-1} + \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix}\frac{Q_n}{1-l_1 a_n}.$$

3. Устойчивость

Предположим, что при вычислениях погрешность возникла только на $(n-1)$-м слое, на всех предыдущих значения функции u_k и ее производных вычислены точно. Тогда для эволюции погрешности имеем

$$\boldsymbol{\delta}_n = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{1-l_1 b_n}{1-l_1 a_n} & \dfrac{1-l_1 c_n}{1-l_1 a_n} \\ 0 & 1-l_2 b_n + \dfrac{1-l_1 b_n}{1-l_1 a_n} l_2 a_n & 2+l_2 c_n + \dfrac{1-l_1 c_n}{1-l_1 a_n} l_2 a_n \\ 0 & -l_3 b_n + \dfrac{1-l_1 b_n}{1-l_1 a_n} l_3 a_n & 1+l_3 c_n + \dfrac{1-l_1 c_n}{1-l_1 a_n} l_3 a_n \end{pmatrix}\boldsymbol{\delta}_{n-1}. \qquad (11)$$

Рассмотрим спектр оператора послойного перехода (11). Собственные числа матрицы есть $\lambda_1^n = 1,\ \lambda_{2,3}^n = \dfrac{p_n \pm \sqrt{{p_n}^2 - 4r_n}}{2}$, где

$$p_n = 2 - b_n l_2 + \frac{1-b_n l_1}{1-a_n l_1}a_n l_2 + c_n l_3 + \frac{1+c_n l_1}{1-a_n l_1}a_n l_3,$$

$$r_n = \left(1 - b_n l_2 + \frac{1-b_n l_1}{1-a_n l_1}a_n l_2\right)\left(1 + c_n l_3 + \frac{1+c_n l_1}{1-a_n l_1}a_n l_3\right) +$$

$$+ b_n l_3 \frac{1-b_n l_1}{1-a_n l_1}a_n l_3\left(2 + c_n l_2 + \frac{1+c_n l_1}{1-a_n l_1}a_n l_2\right).$$

Собственные значения матрицы (11) по модулю не превосходят 1 при $l_1 = 0,5,\, l_2 = 0,3,\, l_3 = 0,1$ для значений $h^{\alpha}(f'_u)^n_{n-1} \in [-0,5;\, 0,4]$ и при $l_1 = -0,1,\, l_2 = -0,3,\, l_3 = 0,1$ для $h^{\alpha}(f'_u)^n_{n-1} \in [-0,2;\, 0,5]$. Значения коэффициентов находились численно с использованием MatLab R2009a.

4. Тестирование метода

Работоспособность метода проверялась при решении тестовых задач. Так, известно [7, с. 47] что

$$D_{ax}^{-\alpha}\left(r + \frac{\cos\sqrt{x-a}}{\sqrt{x-a}}\right) = r\frac{(x-a)^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} + 2^{\frac{2\alpha-1}{2}}(x-a)^{\frac{2\alpha-1}{4}} J_{\frac{2\alpha-1}{2}}\left(\sqrt{x-a}\right),\ r \in \mathbb{R},\ \operatorname{Re}\alpha \geqslant 0.$$

В качестве теста выбиралась задача $D_{ax}^{-\alpha}u(t) = 0,1 + \dfrac{\cos\sqrt{x+0,1}}{\sqrt{x+0,1}}$ с начальным данными

$$u(0) = \frac{0,1^{1+\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} + 2^{\alpha-1/2}\cdot 0,1^{\frac{2\alpha-1}{4}} J_{\alpha-1/2}(\sqrt{0,1}).$$

На рисунках 1—4 представлены результаты численных расчетов.

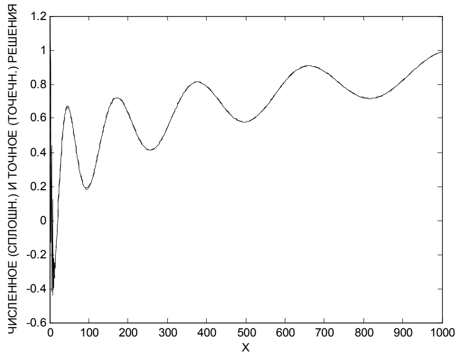

Рис. 1. Точное (сплошная линия) и приближенное (пунктирная линия) решения тестовой задачи при $\alpha = 0,3,\, h = 1$

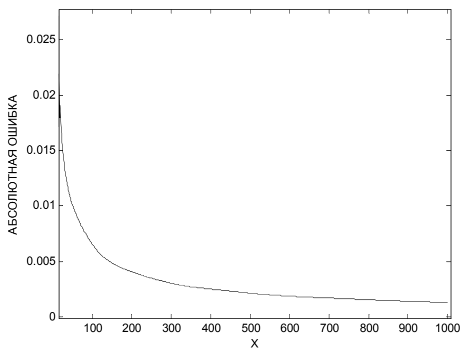

Рис. 2. Абсолютная погрешность решения при $\alpha = 0,3,\, h = 1$

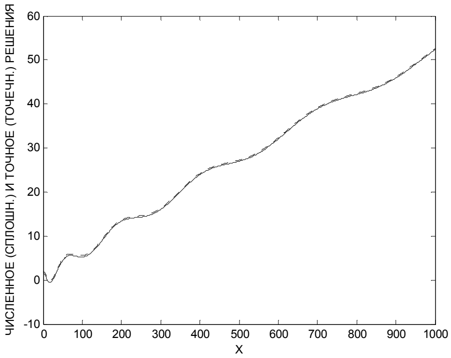

Рис. 3. Точное (сплошная линия) и приближенное (пунктирная линия) решения тестовой задачи при $\alpha = 0,9,\ h = 1$

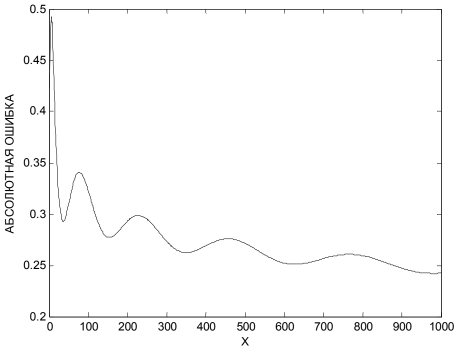

Рис. 4. Абсолютная погрешность решения при $\alpha = 0,9,\ h = 1$

5. Численная оценка реально достигнутого порядка аппроксимации

Реальный порядок аппроксимации метода находился численно. Для различных значений α задача считалась при разных значениях шага. Затем вычислялась евклидова норма ошибки $\mathrm{err}(h)$ на последних $10\,\%$ узлов сетки, чтобы оценить реально достигнутый порядок аппроксимации погрешности метода после завершения разгонного участка.

На рисунке 5 приведен достигнутый порядок аппроксимации в зависимости от порядка производной α.

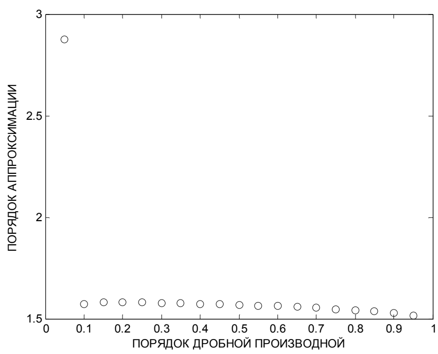

Рис. 5. Зависимость порядка аппроксимации метода от порядка дробной производной

Итак, предложен многозначный метод для решения дифференциальных уравнений с дробными производными. На тестовых задачах метод демонстрирует порядок аппроксимации больший, чем α.

Список литературы

1. *Чукбар К. В.* Стохастический перенос и дробные производные // Журн. эксперим. и теор. физики. 1995. Т. 108, вып. 5, №11. С. 1875—1884.

2. *Кобелев В. Л., Кобелев Я. Л., Романов Е. П.* Недебаевская релаксация и диффузия в фрактальном пространстве // Докл. РАН. 1998. Т. 361, №6. С. 755—758.

3. *Кочубей А. Н.* Диффузия дробного порядка // Дифференциальные уравнения. 1990. Т. 26, №4. С. 660—670.

4. *Mandelbrojt B. B.* The fractal geometry of nature. San-Francisco, 1983.

5. *Таукенова Ф. И., Шхануков-Лафишев М. Х.* Разностные методы решения краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка // Журн. вычислительной математики и математической физики. 2006. Т. 46, №10. С. 1871—1881.

6. *Oldham K. B., Spanier J.* The fractional calculus (theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order). N.Y.; London, 1974.

7. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск, 1987.

8. *Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М., 1990.

9. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. М., 2003.

10. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение. М., 2003.

Об авторах

Валерий Валерьевич Благовидов — студ., МФТИ, e-mail: val_blag@rambler.ru

Алексей Иванович Лобанов — д-р физ.-мат. наук, проф., МФТИ, e-mail: Alexey@crec. mipt.ru

Authors

Valeriy Blagovidov — student, MIPT, Moscow, e-mail: val_blag@rambler.ru

Prosessor Aleksey Lobanov — MIPT, Moscow, e-mail: Alexey@crec.mipt.ru